

Przykład łuku prostego w \mathbb{R}^3 z indykatrixą nigdzie niespójną (zerowymiarową)*

Zygmunt Zahorski

1. Wstęp

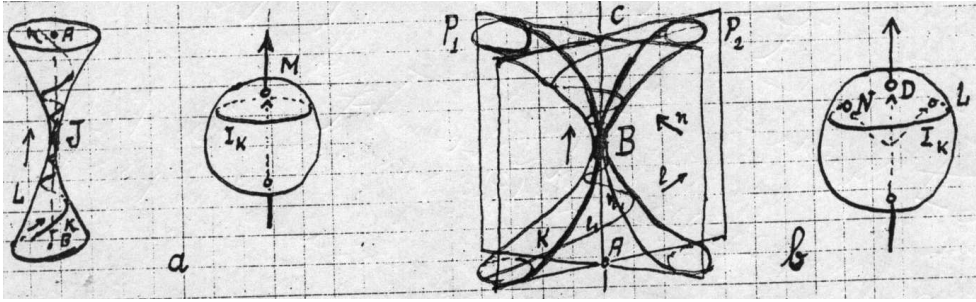
Indykatrixą \mathcal{I}_k krzywej $K: x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), 0 \leq t \leq 1$, mającej wszędzie oś styczną, nazywam zbiór punktów $S(t)$ powierzchni kuli o promieniu 1 i środka w początku układu współrzędnych, odpowiadających wszystkim wartościom $t \in [0, 1]$, przy czym punkt $S(t)$ określam w ten sposób: prowadzę wektor długości 1, o początku w środku układu współrzędnych, równoległy do osi stycznej $L(t)$ krzywej K w punkcie $P(t)$ (tj. $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$) i mający zwrot tej osi. Koniec tego wektora jest punktem $S(t)$. Oś $L(t)$ określam jako wspólną granicę osi $\overrightarrow{P(t), P(t+h)}$ i $\overrightarrow{P(t-h), P(t)}$ przy $h > 0, h \rightarrow 0$ (siecznych, przechodzących przez punkty $P(t), P(t \pm h)$ krzywej K). Oś ta wg założenia istnieje dla każdego $t \in [0, 1]$, przy czym dla $t = 0$ lub $t = 1$ określam ją jednostronnie, tj. jako granicę osi $\overrightarrow{P(0), P(h)}$ przy $h > 0, h \rightarrow 0$.

Gdy krzywa K jest płaska, $f_3(t) \equiv 0$, indykatrixa \mathcal{I}_k jest również płaska, mianowicie składa się z punktów obwodu koła w płaszczyźnie XY , o promieniu 1. W szczególności, krzywa $y = f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą, mającą wszędzie pochodną skończoną lub nieskończoną, $x \in [a, b]$. Wobec tego, że $f'(x)$ ma własność Darboux (przechodzi przez wartości pośrednie) ma indykatrixę spójną, tj. łuk koła o promieniu 1. P.M. Wojdysławski¹ wykazał, że indykatrixę spójną ma każdy łuk prosty w \mathbb{R}^2 , mający wszędzie oś styczną. Twierdzenie to nie daje się uogólnić na \mathbb{R}^3 , łatwo zbudować łuk prosty w \mathbb{R}^3 z osią styczną w każdym punkcie, o indykatrixie niespójnej. Indykatrixą linii śrubowej na walcu kołowym prostym jest oczywiście koło, dotyczy to również linii śrubowych na stożku ew. innych powierzchniach, jeżeli określić śrubowe jako krzywe, których styczna tworzy stały kąt ze stałym wektorem.

* Praca zredagowana na podstawie zachowanego rękopisu profesora Zygmunta Zahorskiego.

¹ Na seminarium prof. Mazura z geometrii różniczkowej, na jesieni 1940 r. – jako uogólnienie jednego z twierdzeń Ostrowskiego. P. Wojdysławski podał dwa własne dowody tego twierdzenia: 1) elementarny, ale skomplikowany, 2) prostszy, oparty na tw. topologii.

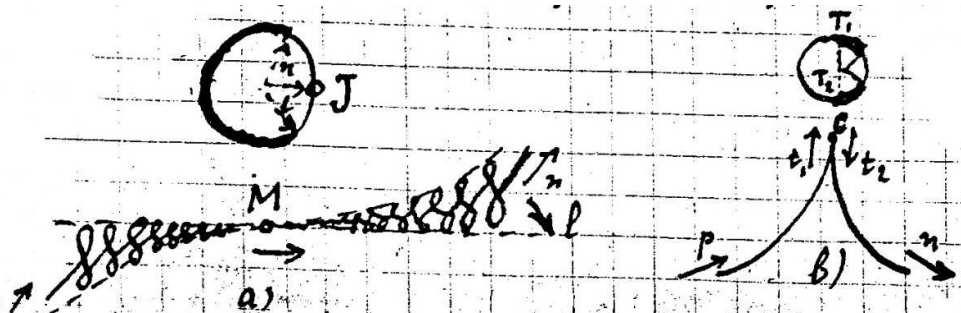
M. Wojdysławski, wybitny topolog, ur. 1918 r. nie daje znaku życia od końca wojny, prawdopodobnie zamordowany przez zbrodniarzy hitlerowskich na tle obłądu rasowego podczas likwidacji ludności getta w Częstochowie, gdzie przeżywał ostatnio.



Rys. 1

Istnienie śrubowych na powierzchniach dostatecznie regularnych wynika z twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych. W szczególności, na powierzchni obrotowej, utworzonej przez obrót łuku koła L dookoła osi AB , stycznej do niego w punkcie P istnieje śrubowa K , której styczna tworzy kąt $\alpha < \frac{\pi}{2}$ z osią AB , wyjątek stanowi punkt P , w którym osią styczną jest oś AB . Indykatrysa \mathcal{I}_k składa się z koła, odpowiadającego zwojom spirali i punktu C , leżącego w jednakowej odległości od wszystkich punktów tego koła, odpowiadającego osi stycznej w P (rys. 1a). (Punkt o tej własności, leżący w mniejszym z obszarów, na które koło dzieli kulę, nazywam środkiem koła na kuli). Krzywą K tak zbudowaną nazywam elementem śrubowym I rodzaju, indykatorysa jej, jako złożona z dwóch zbiorów zamkniętych rozłącznych, jest niespójna. Podobnie, choć nieco trudniej, można zbudować łuk prosty, którego indykatorysa składa się z łuku koła i punktu izolowanego (element śrubowy II rodzaju, rys. 1b). Biorę mianowicie dwie powierzchnie, podobne jak w 1a), tylko odpowiednio wygięte, jak na rysunku 1b, T_1 i T_2 , złączone wierzchołkami w punkcie P , w którym mają wspólną styczną, oś AB . Krzywa K składa się z odcinków śrubowych na T_1 i T_2 , których styczne tworzą z AB kąt α i odcinków prostych $l_1, m_1, l_2, m_2, \dots$ stycznych do tych śrubowych. Zaczynając krzywą K odcinkiem śrubowej na przedniej powierzchni T_1 przechodzę prostą l_1 na tylną powierzchnię T_2 , następnie odcinkiem śrubowej na przednią powierzchnię T_2 , stamtąd prostą m_1 na tylną powierzchnię T_1 , odcinkiem śrubowej na przednią powierzchnię T_2 i prostą l_2 na tylną powierzchnię T_2 itd. „ósemkami”. [Terminów „przednia” i „tylna” strona powierzchni nie precyzuję bliżej, choć można by to tu zrobić, ponieważ intuicyjne stosowanie tych określeń nie prowadzi do nieporozumień]. Odcinkom śrubowej na T_1 odpowiada w indykatorysie \mathcal{I}_k łuk koła ML , odcinkom śrubowej na T_2 – ten sam łuk o zwrocie LM , prostym l_1, l_2, \dots , punkt L , prostym m_1, m_2, \dots , punkt M , punktowi P punkt C (środek koła ML na kuli). Twierdzenie P. Wojdyłańskiego wymaga również koniecznego spełnienia pozostałych dwóch założeń. Choć właściwie, przy nieistnieniu osi stycznej, nie można mówić o indykatorysie, to jednak, w wypadku gdy istnieje prosta styczna, można ostrzom przyporządkować dwa punkty indykatorysy, odpowiadające dwóm zwrotom prostej stycznej. Wtedy jednak, jak widać z rys. 2a, indykatorysa może być niespójna (dwa łuki koła, grubszą linią). Podobnie krzywa z rysunku 2b, mająca wszędzie oś styczną, ale niebędąca łukiem prostym, ma indykatoryse niespójną (łuk koła i punkt izolowany C). Elementy śrubowe I i II rodzaju z rys. 1 o indykatorysie niespójnej mają jednak własność, że indykatorysa zawiera część spójną (koło, ew. łuk koła). Można jednak zageęścić tę osobliwość i otrzymać łuk prosty w \mathbb{R}^3 z osią styczną w każdym punkcie, którego indykatorysa nie zawiera części spójnej, mianowicie jest

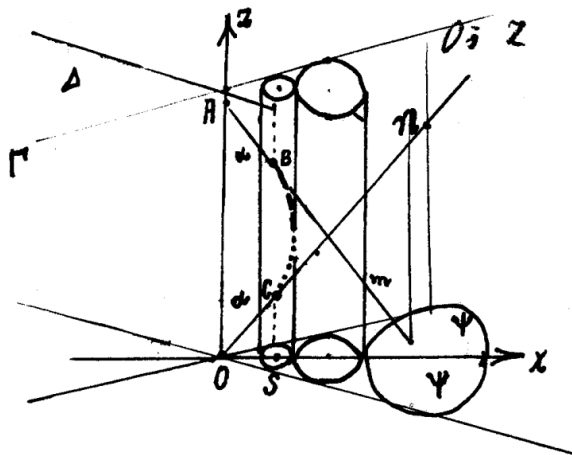
zbiorem zerowymiarowym w sensie Mengera, a nawet podzbiorem zbioru zamkniętego 0-wymiarowego. Celem tej pracy jest skonstruowanie takiego łuku. Posługuję się przy tym elementem śrubowym II rodzaju, zbudowanym nieco inaczej niż na rys. 1b, przy tym słowa „II rodzaju” skreśliłam, ponieważ elementy śrubowe prostsze (I rodzaju) nie są nigdzie użyte.



Rys. 2

2. Budowa elementu śrubowego

Przy dowolnie danych kątach ψ i α , $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, przesuвам przez oś Z układu współrzędnych (prostokątnego) dwie płaszczyzny Γ , Δ , tworzące z płaszczyzną XZ (ich dwusieczną) kąty ψ (rys. 3).



Rys. 3

Oś Z dzieli te płaszczyzny na cztery półpłaszczyzny. W tej półpłaszczyźnie, która przechodzi przez pierwszą ćwiartkę układu XY, prowadzący przez początek układu O półprostą n , tworzącą z osią Z kąt α , w tej, która przechodzi przez IV ćwiartkę, półprostą m przechodzi przez punkt A osi Z, tworzącą z osią Z kąt $\pi - \alpha$. Oznaczam $|OA| = a$.

Przez punkt S osi X prowadzę oś walca stycznego do obu płaszczyzn, oczywiście równoległą do osi Z , oznaczam $|OS| = l$. Przy danym a obieram l tak, że spełnia warunek następujący: niech C i B oznaczają, odpowiednio, punkty styczności prostych n i m z walcem. Mają one dać się połączyć na powierzchni walca łukiem śrubowej lewoskrętnej odpowiadającym łukowi koła o długości mniejszej niż $2\pi r$, której styczna tworzy z osią Z kąt α . W szczególności, proste n i m będą styczne do śrubowej w C i B . Oznaczając przez $h > 0$ różnicę współrzędnych z -owych punktów B i C , mam:

$$h = a - 2|OC| \cos \alpha, \quad (1)$$

$$|OC| = l \cos \psi \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

promień walca $r = l \sin \psi$, długość rzutu łuku śrubowej CB na płaszczyznę XY jest równa $r(\pi + 2\psi)$, więc:

$$h = r(\pi + 2\psi) \operatorname{ctg} \alpha = l \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha (\pi + 2\psi)$$

i warunek dla l jest wg (1) i (2):

$$a - 2l \cos \psi \operatorname{ctg} \alpha = l \sin \psi (\pi + 2\psi) \operatorname{ctg} \alpha, \\ l = \frac{a}{(\pi + 2\psi) \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha + 2 \cos \psi \operatorname{ctg} \alpha}, \quad (3)$$

czyli walec spełniający wymienione warunki istnieje. Stąd długość łuku:

$$|\widehat{CB}| = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{r(\pi + 2\psi)}{\sin \alpha} = \\ = \frac{(\pi + 2\psi) l \sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{a(\pi + 2\psi) \sin \psi}{(\pi + 2\psi) \sin \psi \cos \alpha + 2 \cos \psi \cos \alpha}.$$

Odległość dowolnego punktu łuku $OCBA$ od osi Z jest mniejsza od długości tego łuku równej:

$$2|OC| + |\widehat{CB}| = 2 \frac{a - h}{2 \cos \alpha} + \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}. \quad (4)$$

Rzut takiego punktu na oś Z leży, oczywiście, na odcinku OA .

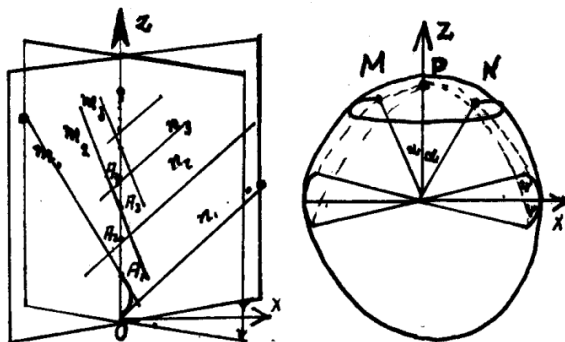
Oznaczając przez $b > 0$ liczbę daną, obieram ciąg punktów w odległościach $\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2} + \frac{b}{4}$, $\frac{b}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{8}$ itd. od 0 na dodatniej osi Z i dzielę nowymi punktami odcinki między kolejnymi dwoma z tych punktów, między pierwszym, tj. 0, a drugim na 10 równych części, między drugim a trzecim na 10^2 równych części, między n -tym a $n+1$ -szym na 10^n części. Oznaczając kolejno tak otrzymane punkty przez O, A_1, A_2, A_3, \dots oraz $OA_1 = a_1, A_1A_2 = a_2, \dots, A_{n-1}A_n = a_n, \dots$, mamy:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = b, \quad \frac{a_n}{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i} \leq \frac{1}{10^k},$$

jeżeli tylko punkty A_{n-1}, A_n leżą w k -tej z dzielonych części. Zauważmy, że przy $n \rightarrow \infty$ jest $k \rightarrow \infty$, stąd:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i} = 0. \quad (5)$$

Przesuwając przez punkty O, A_1, A_2, \dots w płaszczyznach Γ, Δ proste $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$ równoległe do n i m i łącząc w sposób opisany n_i z m_i śrubową lewoskrętną, m_i z n_{i+1} po drugiej stronie osi Z – śrubową prawoskrętną otrzymujemy element śrubowy (rys. 4), którego indykatrysą jest łuk koła łączący punkty N i M , odpowiadające kierunkom n i m i punkt P , środek tego koła na kuli, odpowiadający kierunkowi osi Z .



Rys. 4

Istnienie stycznej i jej kierunek (punkt indykatrasy) są łatwo widoczne na odcinkach prostoliniowych i śrubowych elementu śrubowego, a że styczną w wierzchołku, odległym o b od O , jest oś Z , wynika z oszacowania $\operatorname{tg} \varphi$, gdzie φ jest kątem, jaki z osią Z tworzy sieczna przechodząca przez wierzchołek i punkt elementu śrubowego, leżący na części śrubowej lub prostoliniowej, odpowiadającej odcinkowi a_n . Jest wg (4):

$$\operatorname{tg} \varphi < \frac{a_n}{\cos \alpha \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right)},$$

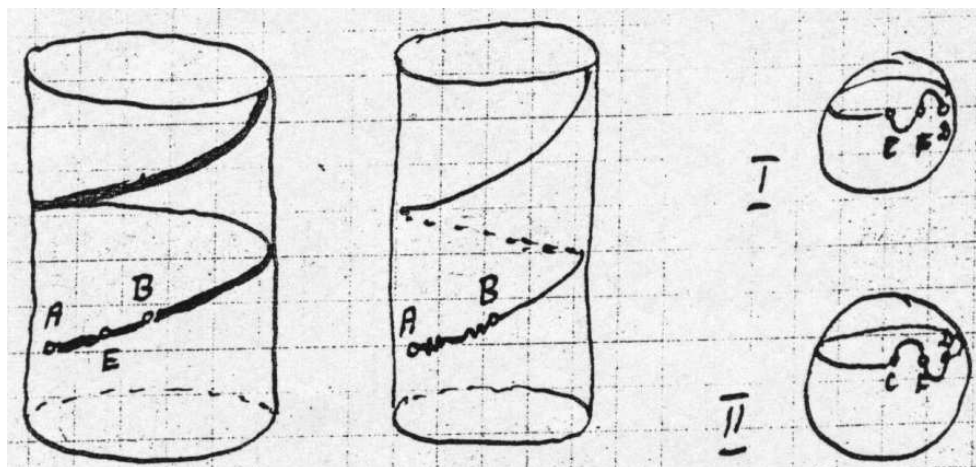
tj. wg (5) $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow 0$, gdy punkt siecznej dąży do wierzchołka. Długość całego łuku elementu śrubowego jest wg (4):

$$\frac{a_1}{\cos \alpha} + \frac{a_2}{\cos \alpha} + \frac{a_3}{\cos \alpha} + \dots = \frac{l}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

Jednocześnie widać, że przez odpowiednią zmianę kierunku prostych n, m, Z można zbudować element śrubowy, którego indykatrysta składa się z dowolnego punktu na kuli i dowolnego łuku koła o „środku” w tym punkcie, byleby większego od połowy obwodu ($\psi > 0$). Oś Z nazywam osią elementu śrubowego.

3. Zastępowanie łuków śrubowej elementami śrubowymi

Rozpatruję łuk AB śrubowej na walcu o promieniu r , np. prawoskrętnej, krótszy od całego zwoju i odpowiadający mu w sposób homeomorficzny łuk indykatory CD (rys. 5). Połączę końce A i B łuku śrubowej krzywą (łukiem prostym) złożoną z dwóch elementów śrubowych, mających jeden odcinek prostoliniowy wspólny. Odcinek ten ma być równoległy do stycznej do śrubowej w środku E łuku AB , której odpowiada punkt F indykatory na środku łuku CD . Osią jednego elementu ma być styczna do śrubowej w A , drugiego – styczna w B . Kierunki pozostałych odcinków prostoliniowych obieram dowolnie, ale tak, aby łuki indykatory elementów były równe, niedużo dłuższe od połowy obwodu i skierowane wypukłością w przeciwne strony „S”, co można zrobić na dwa sposoby (rys. 5 I i 5 II).



Rys. 5

Odkładam w tym celu od A na stycznej do śrubowej w A wektor długości c o zwrocie osi stycznej, od B na stycznej do śrubowej w B wektor długości c o zwrocie przeciwnym do stycznej i łączę końce tych wektorów, przy czym wyznaczam c z warunku, że odcinek łączący ma być równoległy do stycznej w E . Jeżeli z równań otrzymam $c > 0$, to znaczy że konstrukcja jest możliwa. Oznaczam przez α kąt, jaki styczne śrubowej tworzą z osią walca, przez α_1 – analogiczny kąt dla odcinków śrubowych elementów śrubowych, z ich osiami, oczywiście α_1 jest to kąt między stycznymi do śrubowej w A i E , bo styczna w A jest osią elementu, zaś styczna w E jest równoległa do jednego z odcinków prostoliniowych elementu. Układ współrzędnych obieram tak, że oś Z jest osią walca, oś X przechodzi przez A i oznaczam przez φ wartość parametru punktu B w reprezentacji parametrycznej łuku śrubowej AB : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r\varphi \operatorname{ctg} \alpha$. Wreszcie, oznaczając przez p długość odcinka równoległego do stycznej w E , łączącego końce wektorów stycznych o początkach w A i B , otrzymuję wg (6) długość $L = p + 2 \frac{c}{\cos \alpha_1}$ elementu śrubowego zastępującego AB . Z równania śrubowej: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r\varphi \operatorname{ctg} \alpha$, otrzymuję składowe jednostkowego wektora stycznego: $-\sin \varphi \sin \alpha$, $\cos \varphi \sin \alpha$, $\cos \alpha$ i szukany warunek równoległości odcinka łączącego punkty na stycznych śrubowej w A i B do stycznej śrubowej w E jest:

$$\begin{aligned} \frac{-r + r \cos \varphi + c \sin \varphi \sin \alpha}{-\sin \frac{\varphi}{2} \sin \alpha} &= \frac{r \sin \varphi - c \sin \alpha - c \cos \varphi \cos \alpha}{\cos \frac{\varphi}{2} \sin \alpha} = \\ &= \frac{r \varphi \operatorname{ctg} \alpha - 2c \cos \alpha}{\cos \alpha} = p. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie jest tożsamością, drugie daje:

$$2r \frac{1}{\sin \alpha} \sin \frac{\varphi}{2} - 2c \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{r \varphi}{\sin \alpha} - 2c,$$

stąd:

$$c = \frac{r}{\sin \alpha} \frac{\frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{4}} > 0,$$

$$p = \frac{r \varphi}{\sin \alpha} - 2c = \frac{r}{\sin \alpha} \left(\varphi - \frac{\varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{4}} \right),$$

skąd:

$$L = \frac{r}{\sin \alpha} \left[\varphi + \left(\frac{1}{\cos \alpha_1} - 1 \right) \frac{\varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{4}} \right],$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \frac{\varphi}{2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

ostatecznie:

$$L = \frac{r}{\sin \alpha} \left[\varphi + \frac{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\varphi}{4}}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \frac{\varphi}{2}} \frac{\varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{4}} \right],$$

zaś długość połowy zwoju śrubowej jest równa $\frac{r\pi}{\sin \alpha}$, stosunek v tych miar jest:

$$v = \frac{1}{\pi} \left[\varphi + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \frac{\varphi}{2}} \left(\varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right], \quad (7)$$

czyli może być $v < 1$, przy dostatecznie małym φ , dla każdego α i r .

4. Konstrukcja

Łuk prosty K o własnościach wymienionych w tytule zbuduję podając jego równanie: $x = f(z)$, $y = g(z)$, gdzie f i g – funkcje wszędzie różniczkowalne w przedziale $z \in [0, 1]$, $|f'(z)| \leq m$, $|g'(z)| \leq m$. Łuk ten będzie mianowicie granicą łuków $x = f_n(z)$, $y = g_n(z)$, gdzie f_n i g_n to funkcje wszędzie różniczkowalne, $|f'_n(z)| \leq m$, $|g'_n(z)| \leq m$, istnieją $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(z)$, przy tym granice pochodnych istnieją jednostajnie, granice $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z_0)$ istnieją w pewnym punkcie z_0 . Jak wiadomo, $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ i $g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)$ istnieją wtedy jednostajnie, są różniczkowalne i $f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z)$, $g'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(z)$. Istnienie $f'(z)$ i $g'(z)$ pociąga za sobą istnienie osi stycznej, a więc i indykatorysy \mathcal{J}_k . Funkcje $f_n(z)$ i $g_n(z)$ określam przez ich

wykresy: wykresy te są to rzuty łuku K_n łączącego środek O układu współrzędnych z punktem $(0, 0, 1)$ osi Z na płaszczyźnie XZ i YZ odpowiednio. Aby rzuty te były wykresami funkcji jednoznacznej, wystarczy, aby przy przebieganiu łuku K_n w jednym kierunku współrzędna z stale rosła, co uzyskujemy przez warunek, aby styczna do K_n tworzyła małe kąty z osią Z , np. mniejsze od $\frac{\pi}{4}$. Wtedy styczna nie jest nigdzie prostopadła do płaszczyzny ZX względnie ZY i rzuty łuku K_n na te płaszczyzny mają również wszędzie styczne, tworzące z osią Z kąty mniejsze od $\frac{\pi}{4}$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), tj. $f'_n(z)$ i $g'_n(z)$ istnieją i są bezwzględnie mniejsze od m ($\tan \alpha = m$). Warunek ten jest równoważny żądaniu, aby indykatorysa K_n leżała wewnątrz pewnego koła na kuli. Konstrukcja stanowić będzie dowód twierdzenia (ze względów rachunkowych przyjmujemy $m = 1$, co jednak nie zmniejsza ogólności i dowód dla m dowolnego jest analogiczny):

Twierdzenie 4.1. *Dla dowolnej liczby $m > 0$ istnieją funkcje ciągłe skończone, wszędzie różniczkowalne $f(z)$ i $g(z)$, $z \in [0, 1]$, takie że $f'(z)$ i $g'(z)$ mają wszędzie gęste zbiory przedziałów stałości i najwyżej przeliczalne zbiory punktów nieciągłości, $|f'(z)| < m$, $|g'(z)| < m$ dla każdego z , takie że łuk prosty $K: x = f(z)$, $y = g(z)$ ma indykatorycę \mathcal{J}_k różną od punktu i \mathcal{J}_k jest zbiorem 0-wymiarowym w sensie Mengera.*

Łuki K_n mające wszędzie oś styczną, określamy indukcyjnie. Mianowicie K_1 określamy jako element śrubowy łączący początek układu O i punkt $(0, 0, 1)$ ($b = 1$), którego osią jest oś Z i np. $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\psi = \frac{\pi}{12}$.

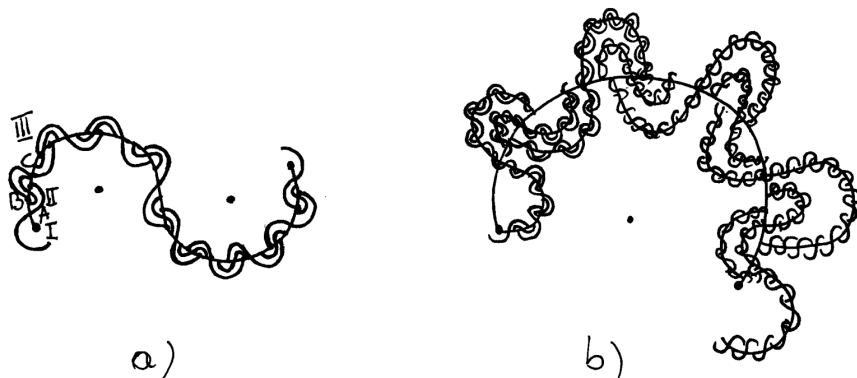
Punkt $(0, 0, 1)$ nazywam punktem osobliwym elementu, odpowiada mu izolowany punkt P_1 indykatorycy \mathcal{J}_{K_1} . Jednocześnie określam indukcyjnie ciąg zbiorów domkniętych F_n na kuli jednostkowej, związanych z indykatorycami \mathcal{J}_{K_n} , kładąc F_0 równe całej powierzchni kuli. Przypuśćmy, że jest już określony łuk K_n , mający indykatorycę \mathcal{J}_{K_n} , i zbiór F_{n-1} , tak że spełniają warunki:

1. Łuk K_n składa się z przeliczalnej ilości odcinków prostoliniowych i łuków śrubowych rozłącznych krótszych od jednego zwoju, a dłuższych od połowy zwoju oraz najwyżej przeliczalnej ilości punktów osobliwych. Punkty osobliwe są punktami skupienia punktów leżących na łukach różnych śrubowych; koniec łuku śrubowej nie jest punktem osobliwym.
2. Indykatorysa I_{K_n} składa się ze skończonej ilości punktów izolowanych P_1, P_2, \dots, P_{m_n} odpowiadających punktom osobliwym łuku K_n i skończonej ilości łuków kół lub „S-ów” rozłącznych i leży wewnątrz koła K odp. kątom mniejszym od $\frac{\pi}{4}$ z osią Z (gdzie „S-em” nazywam sumę dwóch łuków kół nieco większych od połowy obwodu zwróconych wypukłościami w przeciwną stronę i mających punkt wspólny).
3. F_{n-1} składa się z punktów P_1, P_2, \dots, P_{m_n} i obszarów zamkniętych zawierających wewnątrz S-y lub łuki indykatorycy \mathcal{J}_{K_n} (a więc $F_{n-1} \supset \mathcal{J}_{K_n}$), przy tym rozłącznym S-om lub łukom odpowiadają rozłączne obszary je zawierające.

Jak widać, K_1 , \mathcal{J}_{K_1} i F_0 spełniają warunki 1, 2, 3.

Określamy łuk K_{n+1} w sposób następujący: odcinki prostoliniowe i punkty osobliwe łuku K_n należą do K_{n+1} . Łuki śrubowych w K_n dzielimy na pewną skończoną ilość łuków każdy i zastępujemy te części elementami śrubowymi wg rozdziału 2, przy tym łuki indykatorycy I_{K_n} zostają zastąpione leżącymi na nich punktami izolowanymi i łukami innych kół, tak zmieniony łuk K_n przyjmujemy za K_{n+1} . Pozostaje określić bliżej sposób zastępowania łuków śrubowej (rys. 6a). Wystarczy w tym celu podać sposób przejścia

od indykatorycy \mathcal{I}_{K_n} do $\mathcal{I}_{K_{n+1}}$, bo choć każdemu łukowi koła w \mathcal{I}_{K_n} odpowiada nieskończenie wiele łuków różnych śrubowych, to jednak między łukiem jednej śrubowej a odpowiadającym mu łukiem \mathcal{I}_{K_n} zachodzi homeomorfizm, bo łuk ten jest krótszy od całego zwoju (odpowiadające sobie długości łuku śrubowej i indykatorycy są nawet wprost proporcjonalne).



Rys. 6

Rozważam w \mathcal{I}_{K_n} łuk lub „S” złożony z dwóch równych łuków. Dzielę ten łuk lub każdy z dwóch łuków na $3k$ łuków równych o wnętrzach rozłącznych, stykających się końcami i pewne z nich łączę po dwa w łuki dłuższe, mianowicie pierwszy z drugim, czwarty z piątym, siódmy z ósmym, \dots , $(3m+1)$ -szy z $(3m+2)$ -gim. W ten sposób każdy łuk jest sumą $2k$ łuków o wnętrzach rozłącznych i końcach parami wspólnych, takich że z każdego dwóch łuków sąsiednich jeden jest dwa razy dłuższy od drugiego. Liczba k , zależna od n (i ewentualnie od „S”-a) jest przy tym tak duża, że gdy tak otrzymane łuki zastąpimy „S”-ami $\mathcal{I}_{K_{n+1}}$ (tj. odpowiednie łuki śrubowej K_n dwoma elementami śrubowymi K_{n+1}), to:

- 1) „S”-y zastępujące te łuki leżą w domknięciu F_{n-1} , każdy wewnątrz tej samej składowej domknięcia F_{n-1} co zastępowany łuk.
- 2) Średnica zbioru złożonego z „S”-a i zastępowanego przez „S”-a łuku jest mniejsza od $\frac{1}{2^n}$ (średnica jest równa kresowi górnemu odległości dwóch punktów mierzonej łukiem koła wielkiego).
- 3) Element śrubowy K_{n+1} zastępujący część łuku śrubowej K_n jest krótszy od całego tego łuku. (Ponieważ cały łuk śrubowej w K_n zawiera więcej niż połowę zwoju, wystarczy, wg wzoru (7) z rozdziału 2, przyjąć $v < 1$, co da się osiągnąć przy dostatecznie małym φ , tj. przy dostatecznie dużej ilości części, $2k$).

Jak wiadomo, zastąpić łuk „S”-em można na dwa sposoby, więc istnieje 2^{4k} sposobów ułożenia „S”-ów $\mathcal{I}_{K_{n+1}}$ na „S”-ie \mathcal{I}_{K_n} . Obieram jeden z dwóch sposobów wyznaczonych w zupełności przez położenie pierwszego „S”-a (dowolne), zaznaczone dostatecznie jasno na rys. 6a) (*I* „S” zastępuje *AB*, *II* – *BC*, *III* – *CD* itd.). Przy tym sposobie ułożenia, „S”-y $\mathcal{I}_{K_{n+1}}$ zastępujące poszczególne łuki *AB*, *BC*, \dots są rozłączne. W ten sposób łuki lub „S”-y \mathcal{I}_{K_n} są zastąpione przez skończoną ilość rozłącznych „S”-ów $\mathcal{I}_{K_{n+1}}$ i punkty izolowane $P_{m_{n+1}}, P_{m_{n+2}}, \dots, P_{m_{n+1}}$ leżące na łukach lub na „S”-ach \mathcal{I}_{K_n} . (Wynika z tego, choć jest to bez znaczenia, że dla $n \geq 2$, \mathcal{I}_{K_n}

składają się tylko z „ S ”-ów i punktów izolowanych, zaś nie zawierają składowej z łuku pierwszego koła jak \mathcal{J}_{K_1}). Rysunek 6b podaje szkic \mathcal{J}_{K_3} .

Określam $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$ jako sumę wszystkich tych „ S ”-ów i punktów $P_1, P_2, \dots, P_{m_{n+1}}$ i wykażę, że jest to istotnie indykatorysa K_{n+1} oraz K_{n+1} jest łukiem prostym.

Wreszcie określam F_n w ten sposób: obieram liczbę $\delta_n > 0$ taką małą, że δ_n -otoczenia domknięte S -ów rozłącznych $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$ są rozłączne i otoczenia te leżą wewnątrz domknięcia F_{n-1} . Zbiór F_n jest sumą tych otoczeń oraz punktów $P_1, \dots, P_{m_{n+1}}$.

[δ -otoczeniem punktu P na kuli nazywam czaszę kulistą otwartą o środku P , „promieniu” δ mierzonym łukiem koła wielkiego, zaś δ -otoczeniem zamkniętym punktu P – takąż czaszę zamkniętą. Nazywam δ -otoczeniem zbioru Q punktów sumę δ -otoczeń wszystkich punktów zbioru Q . Gdy Q jest S -em lub łukiem koła, to domknięcie δ -otoczenia zbioru Q jest sumą δ -otoczeń domkniętych wszystkich punktów zbioru Q i nazywam je δ -otoczeniem domkniętym zbioru Q].

Udowodnię, że tak określone zbiory $K_{n+1}, \mathcal{J}_{K_{n+1}}, F_n$ spełniają warunki 1), 2), 3). Przede wszystkim widać, że w tych punktach K_{n+1} , które nie należą do *ex definitione* do K_n styczna istnieje i odpowiada jej punkt indykatorysy $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$, bo w punktach tych przejście od K_n do K_{n+1} polega na zastąpieniu łuku śrubowej skończoną ilością elementów śrubowych, których styczne w punktach osobliwych wspólnych są wspólne. Również oczywiste jest, że wewnątrz odcinków prostoliniowych, które wg definicji należą do K_{n+1} , styczna istnieje, mianowicie jest nią prosta zawierająca ten odcinek. Punkty osobliwe K_n są, jak widać, również punktami osobliwymi K_{n+1} (tj. punktami skupienia różnych śrubowych K_{n+1}), a że ponadto przybywają przy zastępowaniu łuków śrubowych K_n przez elementy śrubowe punkty osobliwe w ilości skończonej dla każdego takiego łuku, więc wobec przeliczalności tych łuków, K_{n+1} ma również przeliczalną ilość punktów osobliwych. (Widać stąd, że dla $n \geq 2$, K_n ma dokładnie przeliczalną ilość punktów osobliwych). Każdy element śrubowy zawiera \aleph_0 łuków śrubowych i odcinków prostoliniowych, więc K_{n+1} zawiera przeliczalnie wiele łuków śrubowych i odcinków prostoliniowych, że w nowych punktach osobliwych styczne istnieją i odpowiadają im punkty $P_{m_{n+1}}, \dots, P_{m_{n+1}}$ indykatorysy $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$ oraz końce śrubowych K_{n+1} nie są punktami osobliwymi, jest widoczne z konstrukcji. Pozostaje więc dowieść, że w tych punktach osobliwych K_{n+1} , które są punktami osobliwymi K_n styczna istnieje i to ta sama co dla K_n , a więc tym punktom osobliwym odpowiadają punkty P_1, \dots, P_{m_n} indykatorysy oraz że istnieje styczna w końcach odcinków prostoliniowych wspólnych dla K_n i K_{n+1} . Ponieważ koniec odcinka prostoliniowego w K_n jest albo końcem łuku śrubowej w K_n , albo punktem osobliwym w K_n , więc w przypadku pierwszym istnienie w nim stycznej do K_{n+1} jest widoczne – jest nią jedna z osi elementów śrubowych K_{n+1} , a w przypadku drugim kwestia istnienia stycznej sprowadza się do przypadku stycznej w punktach osobliwych.

Aby wykazać, że styczna do K_{n+1} w punktach osobliwych K_n istnieje, udowodnię indukcyjnie, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{h} = 0, \quad (8)$$

gdzie d – długość dowolnego łuku śrubowej K_{n+1} , h – odległość tego łuku od dowolnego (ustalonego) punktu osobliwego K_{n+1} . Dla K_1 wynika to z mocniejszego warunku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\cos \alpha \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right)} = 0,$$

który wynika ze wzoru (5); K_1 ma tylko jeden punkt osobliwy.

Przypuśćmy, że (8) zachodzi dla K_i . Punkty osobliwe K_{i+1} , które nie są punktami osobliwymi K_i , leżą w ilości skończonej na każdej części K_{i+1} zastępującej łuk śrubowej K_i , są więc izolowane. W dostatecznie małej odległości od takiego punktu osobliwego, K_{i+1} jest elementem śrubowym analogicznym do K_1 lub do dwóch łuków takich jak K_1 o wspólnym wierzchołku i osi. Wobec tego (8) wynika dla tych punktów, podobnie jak dla K_1 z (5).

Weźmy pod uwagę punkt T osobliwy dla K_i oraz K_{i+1} . Każdy łuk śrubowy K_{i+1} leży w pewnym elemencie śrubowym, zastępującym jakąś część łuku śrubowej w K_n , długość d rozważanego łuku K_{n+1} jest oczywiście mniejsza od długości całego elementu śrubowego, a ta znowu jest wg (7) mniejsza od długości d_1 , odpowiedniego łuku śrubowej w K_i .

Rozważany łuk śrubowej K_{i+1} leży w odległości h od punktu T nie mniejszej niż zawierający go element śrubowy, który wg konstrukcji ma wierzchołki wspólne z łukiem śrubowej w K_i . Odległość elementu śrubowego od T jest niemniejsza od odległości wierzchołka minus długość elementu, a zastępując odległość wierzchołka (punktu śrubowej K_i) przez nie większą od niej odległość h_1 , odp. łuku śrubowej K_i od T , zaś długość elementu przez większą od niej wg (7) długość d_1 , tego łuku otrzymujemy, że $h > h_1 - d_1$, stąd $\frac{d}{h} < \frac{d_1}{h_1 - d_1}$, jeśli tylko $h_1 - d_1 > 0$. Ale ponieważ (8) zachodzi dla K_i , więc $\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{d_1}{h_1} = 0$ i $d_1 < h_1$ dla dostatecznie małych h_1 , więc wobec $\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{d_1}{h_1 - d_1} = 0$ mamy $\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{d}{h} = 0$. Pozostaje więc wykazać, że $\lim_{h \rightarrow 0} h_1 = 0$. W tym celu korzystam z tego, że indyktryca \mathcal{J}_{K_i} ($i \leq n$) leży w $F_n \subset K$, więc styczne do K_i tworzą kąt mniejszy od $\frac{\pi}{4}$ z osią Z , wobec tego można łuk K_i przedstawić parametrycznie przez $x = f_i(z)$, $y = g_i(z)$, gdzie z rośnie od 0 do 1. Ponieważ koniec łuku śrubowej K_i nie jest punktem osobliwym T , ani T nie leży na tym łuku, więc T ma współrzędną z większą (lub mniejszą) od współrzędnej z wszystkich punktów łuku, przypuśćmy, że większą (w drugim przypadku rozumowanie jest analogiczne). Przypuśćmy, że istnieje ciąg łuków K_i taki, że $\lim h_1 = a > 0$, zaś dla pewnych łuków K_{i+1} związanych z nimi w sposób wyżej podany mamy $\lim h = 0$. Można więc obrać taki łuk, że $h_1 > \frac{a}{2}$, $h < \frac{a}{8}$. Ponieważ różnica współrzędnych z jest nie większa od odległości, która jest nie większa od $\sqrt{2}$ razy różnica współrzędnych z , więc punkty rozważanego łuku mają współrzędną z mniejszą co najmniej o $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ od współrzędnej z punktu T . Ponieważ jednak pewien punkt K_{i+1} w części zastępującej rozważany łuk ma współrzędną z różną od współrzędnej z punktu T co najwyżej o $\frac{a}{8}$, więc współrzędną z osiąga w tej części wartości większe niż na odpowiednim łuku K_i , zaś końce rozważanej części K_{i+1} , złożonej ze skończonej ilości elementów śrubowych są wspólne z tym łukiem K_i . Ale ponieważ elementy śrubowe mają styczną, więc rozważana część K_{i+1} ma indyktrycę złożoną z „S”-ów i punktów izolowanych, leżącą wg (I) i konstrukcji, w K , wobec tego współrzędną z punktów tej części K_{i+1} zmienia się monotonicznie i nie może być większa niż w końcach, co stanowi sprzeczność. Wobec tego (8) jest udowodniona indukcyjnie dla $1 \leq i \leq n+1$. Weźmy teraz pod uwagę punkt T osobliwy dla K_n i K_{n+1} oraz dowolną sieć przechodzącą przez T i punkt $P \in K_{n+1}$ zmiennej.

Gdy P należy do odcinka prostoliniowego wspólnego dla K_n i K_{n+1} lub jest punktem osobliwym K_n i K_{n+1} , sieczna ta jest również sieczną K_n , dąży więc do stycznej do K_n odpowiadającej jednemu z punktów P_1, \dots, P_{m_n} indyktrasy. Pozostaje rozpatrzyć przypadek, gdy P jest punktem elementu śrubowego, zastępującego jakiś łuk śrubowy K_n . Prowadzę wtedy drugą sieczną przez T i P_1 , gdzie P_1 jest końcem elementu śrubowego zawierającego P , a więc punktem łuku K_n , wobec tego ta druga sieczna dąży do tej samej stycznej. Oszacuję kąt β między tymi siecznymi, wystarczy wykazać, że gdy $P \rightarrow P_1$, to $\beta \rightarrow 0$. Oznaczam $PT = l$, $P_1T = l_1$, zaś odległość łuku śrubowej K_n (zawierającego P_1) od T przez h , jest więc $h \leq l_1$. Ponieważ PP_1 jest niewiększe od długości elementu śrubowego, która jest mniejsza od długości d łuku K_n zawierającego P_1 , wg (7), więc $l \geq l_1 - PP_1 > h - d$, $l_1 > h - d$, $\sin \frac{\beta}{2} < \frac{d}{2(h-d)}$, jeśli $h - d > 0$, ale z (8) wynika, że dla $h \rightarrow 0$, $h > d$ oraz $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{h-d} = 0$, więc $\lim_{h \rightarrow 0} \beta = 0$ i wystarczy wykazać, że $\lim_{l \rightarrow 0} h = 0$. Ponieważ l oznacza odległość punktu P na części K_{n+1} zastępującej łuk śrubowej K_n o wspólnych z nią końcach, dowód jest analogiczny do podanego wyżej dowodu $\lim_{h_1 \rightarrow 0} h = 0$. Wobec tego K_n i K_{n+1} mają w T nie tylko wspólny punkt, ale i wspólną oś styczną, co było do dowiedzenia. Z tego wynika, że $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$ jest indyktrą K_{n+1} i wobec $\mathcal{J}_{K_{n+1}} \subset K$ współrzędna z łuku K_{n+1} stale rośnie i może być przyjęta za parametr. Mając wszędzie styczną, łuk K_n jest ciągiły, w ten sposób jego rzuty na płaszczyzny ZX i ZY , wykresy $f_n(x)$ i $g_n(x)$ są określone, z inkluzji $\mathcal{J}_{K_{n+1}} \subset K$ wynika też, że $|f'_n(x)| \leq 1$, $|g'_n(x)| \leq 1$ dla każdego x , a więc $f_n(x)$ i $g_n(x)$ są wszędzie różniczkowalne i spełniają warunek Lipschitza.

To, że $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$ spełnia warunek 2) z $n + 1$ zamiast n , jest widoczne z konstrukcji $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$, podobnie z definicji liczby δ_n i F_n wynika, że F_n spełnia warunek 3). Wobec tego ciąg zbiorów $K_n, \mathcal{J}_{K_n}, F_n$ spełniających warunki 1), 2), 3) jest określony.

Zbiory zamknięte F_n tworzą ciąg zstępujący. Istotnie, F_{n-1} składa się z punktów P_1, \dots, P_{m_n} i obszarów zamkniętych $Q_{i,n}$ zawierających S -y \mathcal{J}_{K_n} , zaś F_n z punktów $P_1, \dots, P_{m_n}, P_{m_n+1}, \dots, P_{m_{n+1}}$ i obszarów $Q_{j,n+1}$ zawierających S -y $\mathcal{J}_{K_{n+1}}$. Ale obszary $Q_{j,n+1}$ leżą wg definicji w obszarach $Q_{i,n}$, zaś $P_{m_n}, \dots, P_{m_{n+1}}$ – na S -ach \mathcal{J}_{K_n} , a więc w $Q_{i,n}$, stąd $F_n \subset F_{n-1}$. Wobec tego, gdy punkt P jest granicą ciągu punktów P_n , to:

$$P \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n, \quad \text{jeśli } P_n \in F_n.$$

Oszacuję różnicę pochodnych $f'_n(z) - f'_{n+1}(z)$, $g'_n(z) - g'_{n+1}(z)$. Jeśli punktowi Z odpowiada punkt osobliwy lub punkt odcinka prostoliniowego K_n , to styczne K_n i K_{n+1} są wspólne i różnice te są równe zero. Wobec tego niech punktowi Z odpowiada punkt A łuku śrubowej K_n , oraz punkt B elementu śrubowego K_{n+1} zastępującego ten łuk. (Nie może to być inny element śrubowy, bo przebiegając K_n lub K_{n+1} , Z stale rośnie, zaś końce łuku i elementu są wg definicji wspólne). Wobec tego stycznymi w A i w B odpowiadają punkty α i β , z których α leży na części łuku lub S -a \mathcal{J}_{K_n} , zaś β na S -ie lub w punkcie izolowanym zastępującym tę część, więc wg (??)² odległość (geodezyjna na kuli) α od β jest mniejsza od $\frac{1}{2^n}$. Styczne w A i w B tworzą więc kąt $\varphi < \frac{1}{2^n}$, a że ramiona tego kąta tworzą z płaszczyznami XZ oraz YZ

² W rękopisie Profesora brakuje w tym miejscu numeru wzoru (red.).

kąty $\gamma, \delta < \frac{\pi}{4}$, więc ramiona jego rzutu prostokątnego na te płaszczyzny tworzą kąt $\varphi_1 < 2\frac{1}{2^n}$, wg łatwego rachunku.

Jest więc:

$$|\arctg f'_n(z) - \arctg f'_{n+1}(z)| < \frac{1}{2^{n-1}},$$

stąd:

$$\begin{aligned} |f'_n(z) - f'_{n+1}(z)| &= (1 + \xi^2) |\arctg f'_n(z) - \arctg f'_{n+1}(z)| \leq \\ &\leq (1 + L^2) |\arctg f'_n(z) - \arctg f'_{n+1}(z)| < \frac{1 + L^2}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Z tego wynika, że ciąg pochodnych jest jednostajnie zbieżny. Ponieważ punkt $(0, 0, 0)$ jako leżący na odcinku prostoliniowym K_1 , jest wspólny dla wszystkich K_n , czyli $f_n(0) = g_n(0) = 0$ dla każdego n , ciągi $f_n(z)$, $g_n(z)$ są zbieżne w punkcie 0, a więc jednostajnie zbieżne w $[0, 1]$. Kładąc $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, $g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)$, mamy:

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z), \quad g'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(z),$$

czyli funkcje $f(z)$ i $g(z)$ są wszędzie różniczkowalne i spełniają warunek Lipschitza, a styczna do łuku $K: (x = f(z), y = g(z))$ w punkcie z jest granicą stycznych łuków K_n w punkcie z , zaś punkt P indyktrycy \mathfrak{J}_k jej odpowiadający – granicą punktów $P_n \in \mathfrak{J}_{K_n}$. Według (??)³ jest więc:

$$\mathfrak{J}_K \subset \prod F_n = F.$$

Zbiór F jest zamknięty, bo F_n są niepuste i ograniczone, jako leżące na powierzchni kuli, wobec tego $F \supset \bar{\mathfrak{J}}_K$. Zbiór F jest 0-wymiarowy. Wystarczy na to, aby każdy punkt P leżał w obszarze wewnętrznym topologicznego pierścienia kołowego o dowolnie małej średnicy, rozłącznego z F . Ale $P \in F_n$, $F \subset F_n$, dla każdego n , zaś każda składowa F_n da się oddzielić od pozostałych pierścieniem kołowym o średnicy mniejszej od ε plus średnica rozważanej składowej. Wystarczy więc, aby średnice składowych F_n dążyły do zera przy $n \rightarrow \infty$. Wykażę to dla tych składowych, które nie są punktami. Ponieważ wg (??)⁴ S -y \mathfrak{J}_{K_n} mają średnicę mniejszą od $\frac{1}{2^n}$, zaś składowe F_n je zawierające są ich δ_n -otoczeniami, $\delta_n < \frac{1}{2^n}$, więc średnice tych składowych są mniejsze od $\frac{3}{2^n}$, c.b.d.d. Wobec tego \mathfrak{J}_{K_n} nie zawiera części spójnej. Na odcinkach prostoliniowych K_n i na łukach śrubowych styczna do K_n jest ciągła, wobec tego nieciągłość może mieć miejsce tylko w punktach izolowanych. Wobec tego $f'_n(z)$, $g'_n(z)$ mają najwyżej przeliczalny zbiór punktów nieciągłości. Ponieważ granica jednostajnie zbieżnego ciągu jest ciągła w punkcie, w którym są ciągłe wszystkie składniki, $f'(z)$ i $g'(z)$ są również ciągłe niemal⁵ wszędzie.

Z konstrukcji wynika, że łuk K ma wszędziegęsty zbiór odcinków prostoliniowych, na których $f'(z)$, $g'(z)$ są stałe. Biorąc jakiegokolwiek dwa odcinki prostoliniowe K należące do K_1 o różnych kierunkach, widać, że \mathfrak{J}_K nie jest jednym punktem. Wobec tego twierdzenie jest całkowicie dowiedzione.

³ W rękopisie Profesora brakuje w tym miejscu numeru wzoru (red.).

⁴ W rękopisie Profesora brakuje w tym miejscu numeru wzoru (red.).

⁵ Uwaga: to nie znaczy „prawie”.